問題 1

I. 真空の誘電率をε_0とする．以下の問に答えよ．

(1) 図 1 のように真空中に設定された原点 O に点電荷Qをおいた．位置$(x,\ y,\ z)$における電界と電位を求めよ．ただし，無限遠での電位を 0 とする．

(2) 図 1 の点電荷をz方向に十分に長い線電荷（線電荷密度λ）におき換えた（図 2）．位置$(x,\ y,\ z)$における電界と電位を求めよ．ただし，点$(a,\ 0,\ 0)$ $(a > 0)$での電位を 0 とする．

次に，図 3 のように真空中にある直線$x = \pm a$，$y = 0$に線電荷密度λ，直線$x = 0$，$y = \pm a$に線電荷密度$-\lambda$の線電荷がおかれている．ただし，$\lambda > 0$とする．このとき，z軸近傍における電位分布$\phi(x,\ y,\ z)$は，原点 O での電位を 0 とすると近似的に式(i)のように与えられる．

$$\phi(x,y,z) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2\right] \qquad \text{(i)}$$

また，x方向正の向きに一様な磁界が印加されており，その磁束密度はBである．原点 O の近傍の点$(x,\ y,\ z)$にある荷電粒子（質量m，電荷$q > 0$）を考える．荷電粒子の運動に伴う磁界や線電荷への影響は考えなくてよい．

(3) この荷電粒子が受ける力$\boldsymbol{F} = \left(F_x,\ F_y,\ F_z\right)$を求めよ．また，この荷電粒子が満たす運動方程式を求めよ．

(4) 時刻$t = 0$で，この荷電粒子は原点 O にあり，速度$\boldsymbol{v}_0 = \left(0,\ v_y^0,\ 0\right)$ $\left(v_y^0 \neq 0\right)$，加速度$\boldsymbol{a}_0 = (0,\ 0,\ 0)$であった．この荷電粒子が$t > 0$において$z$軸近傍に束縛されながら運動するためには，質量$m$は条件$m < m_0$を満たす必要がある．$m_0$を求めよ．

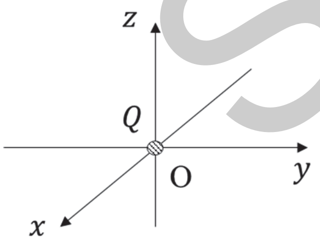

図 1

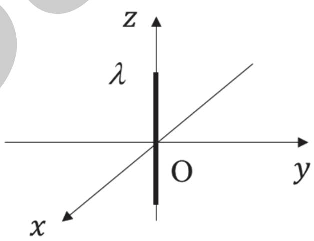

図 2

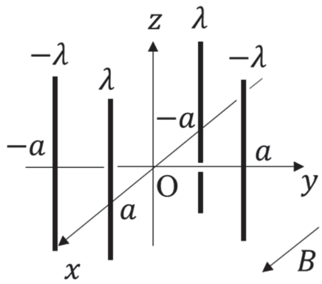

図 3

II. 真空の誘電率をε_0，透磁率をμ_0とする．以下の問に答えよ．

図 4 のように，電気伝導率σの均一な材質からなる半径aの円柱導体が真空中におかれている．その中心軸をz軸とし，z軸の正の方向に電流Iが一様に流れている．円柱導体はその半径aに対して十分長いものとする．

(1) 円柱導体の中心軸から距離rの位置における磁束密度の向きと大きさを求めよ．円柱導体は非磁性でその透磁率はμ_0とする．

(2) 円柱導体内の電界の向きと大きさを求めよ．また，この円柱導体で単位長さ単位時間あたりに発生するジュール熱を求めよ．

(3) 円柱導体表面でのポインティングベクトルの向きと大きさを求めよ．また，単位長さ単位時間あたりに円柱導体の表面を通して出入りする電磁界のエネルギーを求めよ．ただし、位置$\boldsymbol{r}$における電界と磁界を$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$としたとき，ポインティングベクトル$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$は$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$で表される．

真空中におかれた半径bの円形電極を間隔dで対向させた平行平板コンデンサに電荷Q_0が蓄積されている．このコンデンサに，スイッチを介して電気抵抗Rを接続する（図 5）．時刻$t = 0$においてスイッチを閉じ放電を開始した．時刻tにおいてコンデンサに蓄えられている電荷を$Q(t)$とする．bはdに比べて十分大きく，コンデンサの端での効果は無視できるものとする．

(4) このコンデンサの静電容量Cと放電前に蓄えられているエネルギーU_1を求めよ．

(5) 時刻tにおけるコンデンサの電極間の電界と中心軸から距離bにおける磁束密度を，$Q(t)$を用いて表せ．

(6) ポインティングベクトルを用いて，放電開始後十分時間が経過するまでにコンデンサに出入りした正味の電磁界のエネルギーU_2を求めよ．

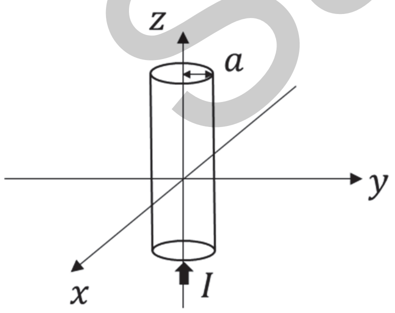

図 4

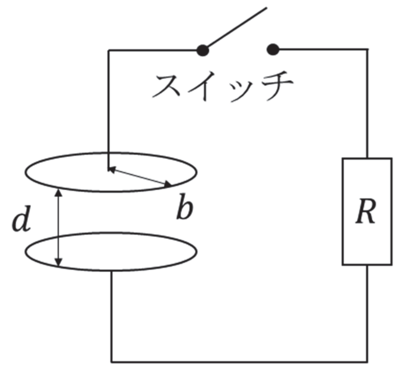

図 5