問題３

I. 情報理論に関する以下の問に答えよ．無記憶情報源$X = \{0, 1\}$におけるi番目（ただし$i = 1, 2, 3, \cdots$）の信号をX_iとし，$X_i = 0$となる確率をp，$X_i = 1$となる確率を$1 - p$とする．近似値として$\log_2 3 = 1.6$，$\log_2 5 = 2.3$，$\log_2 7 = 2.8$を用いてよい．

(1) $p = 0.75$のときのエントロピー$H(X)$を求めよ．

(2) $p = 0.75$のとき，Xの連続した２つの信号をひとまとめにした$\{00, 01, 10, 11\}$の４値を効率よく符号化したい．符号化の例を示し，そのときの平均符号長を求めよ．

Xを入力とする無記憶通信路Cを考える．その出力を$Y = \{0, 1\}$，i番目の出力信号をY_iとしたとき，80%の確率で$Y_i = X_i$となるが，20%の確率でX_iにかかわらず$Y_i = 1$となる．

(3) $p = 0.75$のときのエントロピー$H(Y)$を求めよ．また，相互情報量$I(X; Y)$を求めよ．

(4) $I(X; Y)$を最大化するpは0.5より大きいか小さいか答えよ．根拠も簡潔に述べよ．

II. 信号処理に関する以下の問に答えよ．時間tおよび角周波数ωは実数，jは虚数単位であり，複素数aの複素共役をa^*と表す．また，複素関数$x(t)$のフーリエ変換$X(\omega)$とそのフーリエ逆変換を次式で定義する．

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{i}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{ii}$$

(1) $\mathcal{F}^{-1}[X^*(\omega)] = x^*(-t)$が成り立つことを示せ．

(2) $x(t)$が実関数のとき，$X^*(\omega) = X(-\omega)$が成り立つことを示せ．

アナログフィルタ A のインパルス応答を実関数$f(t)$で表す．A の応答が因果律を満たすことから，$t < 0$において$f(t) = 0$である．また，$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$の実部および虚部をそれぞれ$F_1(\omega)$，$F_2(\omega)$とおくと，$F(\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega)$である．

(3) $f_1(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)]$を，$f(t)$を用いて表せ．

(4) $f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)]$を，$f(t)$を用いて表せ．

(5) $F_1(\omega)$が既知で$F_2(\omega)$が未知のとき，フーリエ変換とフーリエ逆変換を用いることで$F_1(\omega)$から$F_2(\omega)$を求めることができる．その手続きを 3 行程度で説明せよ．必要に応じて図や式を用いても良い．

ある実信号$s_1(t)$の角周波数帯域が$|\omega| \leq \omega_\mathrm{B}$である，すなわち，$|\omega| > \omega_\mathrm{B}$のとき$\mathcal{F}[s_1(t)] = S_1(\omega) = 0$とする．この信号により角周波数$\omega_\mathrm{c}$ ($\gg \omega_\mathrm{B}$)の搬送波を変調する状況を考える．

(6) 実信号$d(t) = s_1(t)\cos\omega_\mathrm{c}t$のフーリエ変換$D(\omega) = \mathcal{F}[d(t)]$を$S_1(\omega)$を用いて表せ．また，$D(\omega)$の角周波数帯域が$\omega_\mathrm{c} - \omega_\mathrm{B} \leq |\omega| \leq \omega_\mathrm{c} + \omega_\mathrm{B}$となることを示せ．

(7) $s_1(t)$が既知であれば，適切な実信号$s_2(t)$を準備し，実信号$u(t) = s_1(t)\cos\omega_\mathrm{c}t + s_2(t)\sin\omega_\mathrm{c}t$を生成することで，$U(\omega) = \mathcal{F}[u(t)]$の角周波数帯域を$\omega_\mathrm{c} \leq |\omega| \leq \omega_\mathrm{c} + \omega_\mathrm{B}$に制限することができる．$s_1(t)$から$s_2(t)$を求める手続きを 3 行程度で説明せよ．必要に応じて図や式を用いても良い．