問題３

I. 情報理論に関する以下の問に答えよ．3 つの状態$\{s_0, s_1, s_2\}$を持つマルコフ情報源を S とする．各試行で S は以下の式で与えられる遷移確率行列 T に従って次の状態に遷移する．

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p(s_0|s_0)} & \boldsymbol{p(s_1|s_0)} & \boldsymbol{p(s_2|s_0)} \\ \boldsymbol{p(s_0|s_1)} & \boldsymbol{p(s_1|s_1)} & \boldsymbol{p(s_2|s_1)} \\ \boldsymbol{p(s_0|s_2)} & \boldsymbol{p(s_1|s_2)} & \boldsymbol{p(s_2|s_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0.3} & \boldsymbol{0.7} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0.3} & \boldsymbol{0.5} & \boldsymbol{0.2} \\ \boldsymbol{0.8} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0.2} \end{bmatrix}$$

遷移の間，S は次の状態を出力する．必要に応じて以下の近似を用いてよい:

$\log_2 3 = 1.58$ ，$\log_2 5 = 2.32$，$\log_2 7 = 2.81$

(1) S の状態遷移図を描け．

(2) 試行を十分な回数繰り返した後，それぞれ状態 s_0，s_1，s_2 になる確率 P_0，P_1，P_2 を求めよ．

(3) S の全体のエントロピーを求めよ．(2)で定義される P_0，P_1，P_2 を用いて回答に示せ．

(4) S の連続する 2 つの出力に対して符号語を割り当てることを考える。

(4-i) 最も効率の良い符号を設計せよ。

(4-ii) (4-i)で設計した符号の符号化効率について、定量化する方法について述べよ．

II. 信号処理に関する以下の問に答えよ．連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は，t $(-\infty < t < \infty)$ を時間，ω を角周波数， j を虚数単位とすると

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \tag{i}$$

で与えられる．その逆フーリエ変換は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \tag{ii}$$

で与えられる．単位インパルス関数 $\delta(t)$ は

$$\boldsymbol{\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}} \quad \text{かつ} \qquad \boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1} \tag{iii}$$

で表される．周期 T の周期関数 $g(t)$ の複素フーリエ級数展開は

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \quad (n\text{:整数}) \tag{iv}$$

で表される．

(1) 連続実時間信号 $x(t)$（ただし実数）のフーリエ変換を $X(\omega)$ とする．その複素共役 $X^{*}(\omega)$ は $X(-\omega)$ と等価であることを示せ．

(2) 単位インパルス関数のフーリエ変換を求めよ．

(3) 信号 $x(t)$ をローパスフィルタに入力し，出力信号 $y(t)$ を得るものとし，ローパスフィルタは理想的な周波数応答 $H(\omega)$ を持ち，ω_c (> 0) を遮断周波数としたとき

$$\boldsymbol{G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}} \tag{iv}$$

であるとする. $x(t)$ が単位インパルスであると仮定したとき, 出力信号 $y(t)$ を求めよ. さらに，$y(t)$ の波形を描き，$y(0)$ の値，および $y(t) = 0$ となる t の値を示すこと.

(4) 周期 T (> 0) の周期インパルス列 $d(t)$ は

$$\boldsymbol{d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)} \tag{\textbf{vi}}$$

のように示すことができる.

(4-i) $d(t)$の複素フーリエ級数展開を表せ.

(4-ii) $d(t)$のフーリエ変換を $D(\omega)$ としたとき，$D(\omega)$が周期インパルス列からなることを示せ.

(5) 連続実時間信号 $x(t)$を標本化することを考える。

(5-i) 標本化された信号から $x(t)$ をどのように復元すればよいか，数行程度で説明せよ．必要に応じて Eq. (iv)から(vi)を用いてよい.

(5-ii) 標本化された信号から $x(t)$ が復元できるときの条件を示せ.