問題３

I. 図 1 に示す 2 元通信路 Γ を考える．Γ は入力が $X = \{0, 1\}$，出力が $Y = \{0, 1\}$ である記憶のない定常通信路であり，入力が 0 のときの誤り率を p，入力が 1 のときの誤り率を q とする．p および q はそれぞれ $0 \le p \le 1$，$0 \le q \le 1$ を満たす．以下の問に答えよ．なお $f(x) = x \log_2 x$ に関して $f(0) = 0$ としてよい．解答においては導出の過程も示すこと．

(1) X が無記憶情報源であり，0 と 1 の生起確率はともに 1/2 とする．$p = 1/4$，$q = 1/8$ のとき，下記の値を求めよ．必要に応じて $\log_2 3 = 1.6$，$\log_2 5 = 2.3$，$\log_2 7 = 2.8$ を用いよ．

(1-i)　入力 X のエントロピー $H(X)$

(1-ii)　出力 Y のエントロピー $H(Y)$

(1-iii)　X と Y の相互情報量 $I(X;Y)$

(2) $p = q$ のとき，Γ の通信路容量 C について考える．

(2-i)　C を p の関数として求めよ．

(2-ii)　C を最大とする p の値を求めよ．

(3) Γ の通信路容量 C が 0 となる場合を考える．このとき p と q が満たす関係式を求めよ．

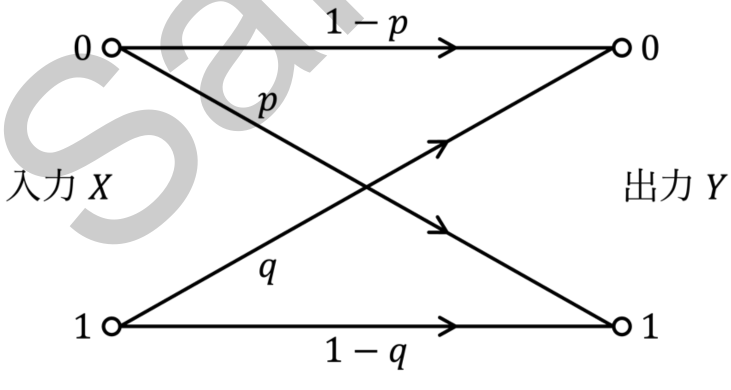

図 1

II. 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は，時間 t および角周波数 ω を実数，j を虚数単位として

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

で与えられる．その逆フーリエ変換は,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

で与えられる．以下の問に答えよ．必要に応じてフーリエ変換におけるパーセバルの定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

を用いよ．解答においては導出の過程も示すこと．

(1) フーリエ変換を適用できる信号の条件を簡潔に述べよ．

(2) $F(\omega)$ に $\omega = t$ を代入して得た連続時間信号 $F(t)$ のフーリエ変換について考える．$F(t)$ のフーリエ変換を $\mathcal{F}[F(t)]$ とするとき，定数 α を用いて $\mathcal{F}[F(t)] = \alpha f(-\omega)$ が成り立つ．定数 α を求めよ．

(3) 次式で与えられる連続時間信号 $x_1(t)$ のフーリエ変換 $X_1(\omega)$ を求めよ．

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1 \le t \le 1) \\ 0 & (t < -1, 1 < t) \end{cases}$$

(4) 連続時間信号 $x_2(t)$ を線形システム A に入力したときの出力を $y(t)$ とする．$x_2(t)$ ならびに A のインパルス応答 $h(t)$ は次式で与えられる．

$$x_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t-1)}{t-1} & (t \ne 1) \\ 1 & (t = 1) \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \ge 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

(4-i) $x_2(t)$ のフーリエ変換 $X_2(\omega)$ を求めよ．

(4-ii) 次式で定義される $y(t)$ のエネルギー E_y を求めよ．

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$