

## 問題 1

I. 真空中に置かれた半径 $a$ の導体球に電荷 $Q$ を与えた。以下の間に答えよ。ただし真空の誘電率を $\epsilon_0$ 、無限遠での電位を $0$ とする。必要であれば極座標系 $(r, \theta, \varphi)$ における以下のベクトル解析の公式を用いてよい。

$$\text{grad}f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right), \quad \text{div}A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- (1) 球の中心から距離 $r$ における電界強度を求めよ。
- (2) 球の中心から距離 $r$ における電位を求めよ。

次に、図1に示すように、真空中に置かれた半径 $a$ 、比誘電率 $\epsilon_r = 3$ の誘電体球に電荷（真電荷）を体積密度 $\rho_0 (> 0)$ で均一に帯電させた。以下の間に答えよ。

- (3) 球の中心から距離 $r$ における電界強度を求めよ。横軸を $r$ としてグラフも描け。
- (4) この系に蓄えられた静電エネルギーを求めよ。
- (5) 球の中心から距離 $r (< a)$ における分極 $\mathbf{P}$ の大きさと向きを求めよ。また、それをもとに、 $r (< a)$ における分極電荷体積密度および、球の表面における分極電荷面密度を求めよ。
- (6) 誘電体球に与える電荷（真電荷）を、均一な体積密度ではなく、中心からの距離 $r$ に依存する体積密度 $\rho(r)$ で帯電させた。球の内部 $r (< a)$ における電位 $V(r)$ が次式で与えられるとき、 $\rho(r)$ を求めよ。

$$V(r) = V_0 \left( 1 - \frac{r^3}{10a^3} \right)$$

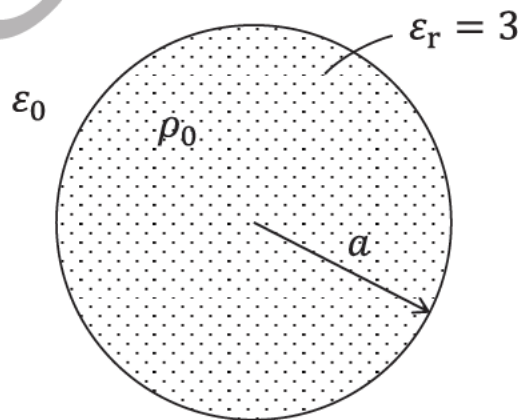


図 1

II. 真空の透磁率を $\mu_0$ とする。以下の間に答えよ。

- (1) 十分に長く太さの無視できる 2 本の平行導線が、真空中に間隔 $d$ で置かれている。2 本の導線には、定常電流 $I$ が同じ向きに流れている。導線の単位長さあたりに働く力の大きさと向きを求めよ。
- (2) 問(1)における、導線に垂直な面内での磁力線の概形を描け。2 本の導線に定常電流 $I$ が互いに逆向きに流れている場合についても描け。

次に、図 2 のように、真空中に半径 $a$ 、一様な透磁率 $\mu$ の十分長い円柱導体を置き、定常電流 $I_1 (> 0)$ を円柱導体の断面に均一に流した。さらに、この円柱導体の中心軸を含む平面上に、十分細い導線でできた半径 $b$ 、巻数 1 の円形コイルを置き、図 2 に示す向きに定常電流 $I_2 (> 0)$ を流した。円柱導体の中心軸と円形コイルの中心の距離を $D$  ( $D \gg a$ ,  $D \gg b$ )として、以下の間に答えよ。

- (3) 電流 $I_1$ が円柱導体の中心軸から距離 $r$ の点に作る磁界の大きさを求めよ。
- (4) 円柱導体内部の単位長さあたりに蓄えられた磁界のエネルギーを求めよ。これをもとに、円柱導体の単位長さあたりの内部インダクタンスを求めよ。
- (5) 円柱導体と円形コイルの相互インダクタンスを求めよ。ただし $D \gg b$ より、電流 $I_1$ が作り円形コイルに鎖交する磁束は、電流 $I_1$ が円形コイル中心に作る磁束密度に円形コイルの面積をかけたものと等しいと近似してよい。
- (6) 問(5)の結果に基づき、円形コイルに働く力の大きさと向きを求めよ。

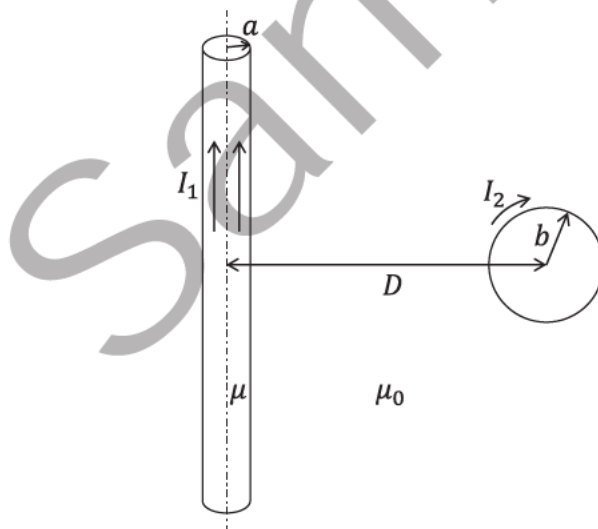


図 2

## 問題 2

I. 電気回路に関する以下の間に答えよ。図中の記号は凡例に従う。

図1の回路において、スイッチSを十分長い時間開けておき、時刻 $t = 0$ において閉じたとする。時刻 $t > 0$ における電流 $i(t)$ について、以下の間に答えよ。

- (1) 電流 $i(t)$ が満たす方程式を書け。
- (2) 電流 $i(t)$ の波形が減衰振動となるために、回路が満たすべき条件を求めよ。
- (3)  $R_{S1} = R_1 = 1 \Omega$ ,  $L_1 = 1 \text{ H}$ ,  $C_1 = 1 \text{ F}$ ,  $V_{S1} = 1 \text{ V}$ としたとき、電流 $i(t)$ を表す式を求めよ。

次に、図2に示す回路を構成した。正弦波交流電圧源 $V_i(t)$ の角周波数を $\omega$ とする。

- (4) 抵抗 $R_2$ に供給される電力が最大となる $L_2$ と $C_2$ の値を求めよ。角周波数 $\omega$ 、抵抗値 $R_{S2}$ ,  $R_2$ を用いて表すこと。ただし、 $R_2 > R_{S2}$ とする。

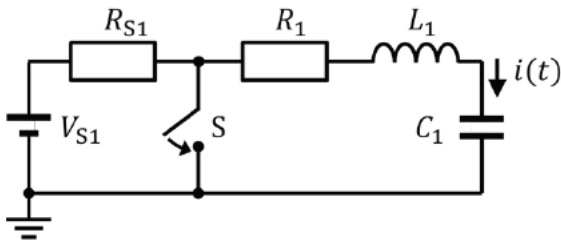


図1

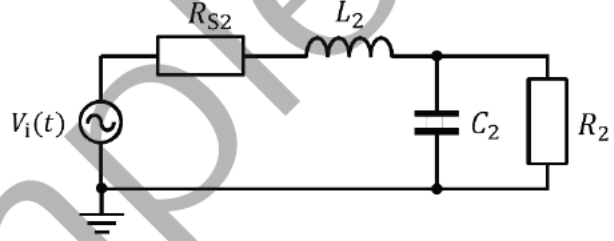


図2

次に、図3に示す回路を構成した。時刻 $t < 0$ では、スイッチ $S_5$ のみを閉じておいた。時刻 $t \geq 0$ では、 $\Delta T$ 秒ごとに以下の2状態を切り替えるようスイッチ $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ を開閉した。

状態1：時刻 $t = 2M\Delta T$  ( $M = 0, 1, 2 \dots$ )のとき、スイッチ $S_1$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ を閉じ、スイッチ $S_2$ ,  $S_3$ を開ける。

状態2：時刻 $t = (2M + 1)\Delta T$ のとき、スイッチ $S_2$ ,  $S_3$ を閉じ、スイッチ $S_1$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ を開ける。

なお図3は、回路が状態2から状態1に切り替わる様子を示している。

- (5) 時刻 $t \geq 0$ において電流 $I_L$ が振動のない減衰波形となるために、 $L_3$ ,  $R_3$ ,  $C_3$ が満たすべき関係を求めよ。
- (6)  $R_3 = 1 \Omega$ ,  $C_3 = C_4 = 1 \text{ F}$ ,  $L_3 = 0 \text{ H}$ ,  $V_{S2} = 1 \text{ V}$ ,  $\Delta T = 1 \text{ 秒}$ としたとき、ノード $N_1$ における電位の最大値 $V_M$ を計算せよ。 $e^{-1} = 0.37$ を用いて良い。

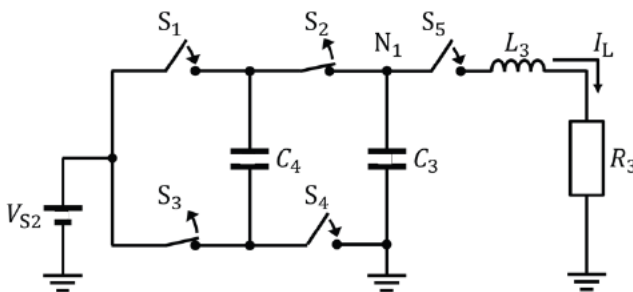
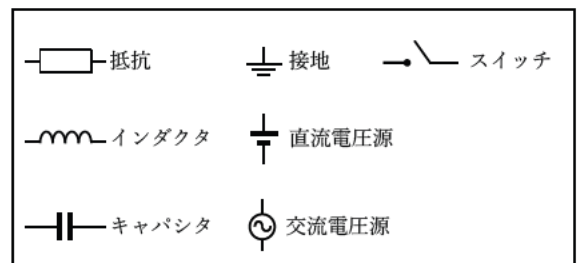


図3



凡例

II. MOSFET を用いた回路に関する以下の間に答えよ。図中の記号は凡例に従う。ただし基板バイアス効果は無視できるものとする。トランジスタの閾値電圧を $V_{TH}$ とする。トランジスタ $M_1$ のトランスコンダクタンスを $g_{m1}$ 、トランジスタ $M_2$ のトランスコンダクタンスを $g_{m2}$ とする。

(1) 図4に示す増幅回路を構成した。

(1-i) トランジスタ $M_1$ の流すドレイン電流を $I_D$ とする。トランジスタ $M_1$ が飽和領域で動作するための条件を $R, I_D, V_{DD}, V_{IN}, V_{TH}$ を使って表せ。

(1-ii) トランジスタ $M_1$ が飽和領域で動作し、チャンネル長変調効果は無視できるとき、小信号等価回路を図示し、小信号利得を求めよ。

(1-iii) トランジスタ $M_1$ が飽和領域で動作し、チャンネル長変調効果は無視できないとき、小信号等価回路を図示し、小信号利得を求めよ。ただし、トランジスタ $M_1$ のチャンネル長変調効果は線形抵抗 $r_{o1}$ で近似されるものとする。

(2) 図5に示した増幅回路について、小信号利得を求めよ。ただし、トランジスタ $M_2$ は飽和領域で動作するように、バイアス電位 $V_B$ が与えられている。トランジスタ $M_2$ のチャンネル長変調効果は線形抵抗 $r_{o2}$ で近似されるものとする。

(3) 図6に示す増幅回路を構成した。小振幅交流信号を入力とする。トランジスタ $M_1$ は飽和領域で動作しているものとする。

(3-i) ノードXにおける信号 $V_X$ に対する小信号利得 $V_{OT}/V_X$ を求めよ。ただし、トランジスタ $M_1$ のチャンネル長変調効果は線形抵抗 $r_{o1}$ で近似されるものとする。

(3-ii)  $C_1, C_2$ に流れる電流に着目して、小信号利得 $V_{OU}/V_{IN}$ を求めよ。

(4) 図4, 5, 6の各増幅回路が有する利点・欠点を、それぞれ1つずつ説明せよ。

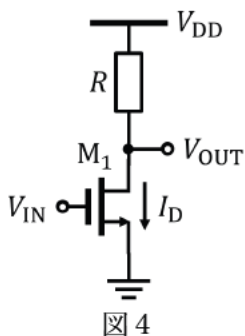


図4

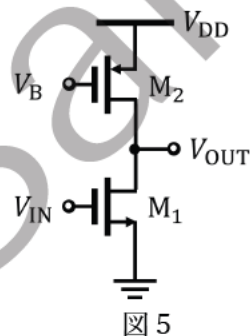


図5

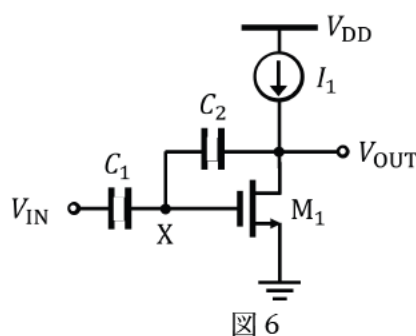
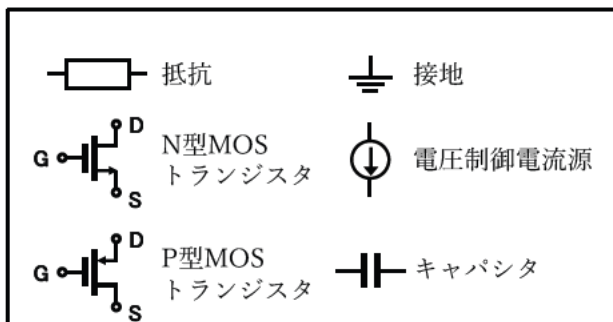


図6



凡例

### 問題 3

I. 情報理論に関する以下の問に答えよ。近似値として  $\log_2 3 = 1.6$ ,  $\log_2 5 = 2.3$  を用いよ。

- (1) 天秤を用いて複数のコインを調べることを考える。天秤による計測の結果は、「釣り合っている」「左側が軽い」「右側が軽い」の 3 通りの状態をとる。天秤を 1 回用いることで得られる最大情報量を求めよ。

コインが 12 個ある。12 個のうち、他のコインと重さが異なる偽コインが 1 つ含まれている可能性がある。すなわち、12 個のコインがとり得る状態は「重い偽コインが 1 つ含まれている 12 通り」「軽い偽コインが 1 つ含まれている 12 通り」「偽コインは含まれていない 1 通り」の計 25 通りあり、これらのコインの状態をあらわす確率変数を  $X$  とする。すべての状態は同一の発生確率を有するものとし、 $H(X)$  をエントロピーとする。

- (2) 12 個のコインの中から、偽コインがあればそれを特定し、偽コインが重いか軽いかを明らかにするために必要な情報量は  $H(X)$  となる。 $H(X)$  を求めよ。
- (3) 天秤を複数回用いて、偽コインが含まれているか否かを明らかにし、偽コインが含まれている場合には偽コインを特定し、それが重いか軽いかを明らかにした。そのために必要となる天秤の利用回数について、問(1)と問(2)の結果から言えることを説明せよ。

天秤の左右にそれぞれ  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ) 個のコインをのせて、重さを比べたときに得られる相互情報量  $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$  について考える。ここで  $Y$  を天秤で重さを比べたときの結果を表す確率変数 ( $Y = B$ : 釣り合っている,  $Y = L$ : 左側が軽い,  $Y = R$ : 右側が軽い) とする。なお、 $H(X|Y)$  は条件付エントロピーである。以下では、事象  $A$  の発生確率を  $\Pr(A)$  と表す。

- (4)  $\Pr(Y = L)$  と  $\Pr(Y = B)$  を  $m$  の関数として求めよ。
- (5)  $H(X|Y)$  を、 $\Pr(Y = L)$ ,  $\Pr(Y = R)$ ,  $\Pr(Y = B)$ ,  $H(X|Y = L)$ ,  $H(X|Y = R)$ ,  $H(X|Y = B)$  を用いて表せ。
- (6)  $H(X|Y = L)$ ,  $H(X|Y = R)$ ,  $H(X|Y = B)$  を求めれば、問(2), 問(4), 問(5)より  $I(X; Y)$  を求めることができる。第 1 回目の天秤を用いた比較で左右のそれぞれにのせるコインの個数について、 $I(X; Y)$  から言えることを説明せよ。

II. 無線通信システムにおいて、マルチパスに起因する遅延波の影響を除去するデジタルフィルタを設計したい。マルチパスを、図1のチャンネルインパルス応答（遅延波が直接波の $a$ 倍であり、直接波と1つの遅延波からなる2パスチャンネル）としてモデル化できるとする。なお、 $a$ は実定数である。

以下では、送信信号を $x(n)$ 、受信信号を $y(n)$ とする。ここで、 $x(n)$ と $y(n)$ は離散信号であり、 $n$ は整数である。

- (1)  $x(n)$ と $y(n)$ の関係を差分方程式で表せ。
- (2)  $x(0) = 1, x(1) = -2, x(n) = 0 (n \neq 0, 1), a = 0.8$ としたときの $y(n)$ を求めよ。
- (3)  $y(n)$ から $x(n)$ を取り出すデジタルフィルタのインパルス応答 $g(n)$ を求めよ。
- (4) 問(3)のデジタルフィルタが安定して動作するための条件を示せ。

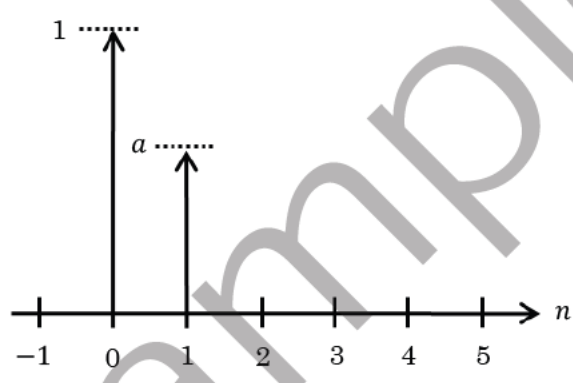


図1

## 問題 4

I. 論理回路に関する以下の問に答えよ.  $x, y$ などの小文字のイタリックで表された変数は論理変数とする. 論理積(AND), 論理和(OR), 排他的論理和(XOR), 否定(NOT)はそれぞれ  $x \cdot y, x + y, x \oplus y, \bar{x}$ と表す. また, 回路図に使用する論理ゲート記号を図 1 に示す. 解答においてもこれらの記号を用いること.

- (1) 図 2 の回路図で示される論理関数  $o = C(x, y, z)$  の真理値表を求めよ. また  $C(x, y, z)$  の論理式を可能な限り簡単な積和形で示せ.
- (2) 1 桁の 2 進数  $x$  と  $y$  および桁上り  $i$  の 3 つの入力に対して, その和  $z$  と桁上り  $c$  を求める図 3 のような全加算器回路 FA を実装したい.  $z$  および  $c$  を  $(x, y, i)$  の論理関数として可能な限り簡単な積和形で示せ. また, 図 4 は回路 FA の実装とする. この時, XOR ゲートだけを用いて図 4 の  $A_1$  の部分を, NAND ゲートだけを用いて図 4 の  $A_2$  の部分を構成し, それぞれの回路図を示せ.

以下, 図 3 に示す全加算器回路 FA を用いて, 回路 S, D, SD を構成したい.

- (3) 2 進数で表された 2 桁の数  $X = x_1x_0$  と  $Y = y_1y_0$  の和を求める図 5 のような回路を S とする. S への入力は  $(x_0, y_0, x_1, y_1)$  とし, 和  $Z = X + Y$  の 2 進数表現  $Z = z_2z_1z_0$  に対して出力は  $(z_0, z_1)$  とする. 全加算器回路 FA と必要に応じて図 1 に示すゲート類を用いて回路 S を構成し, その回路図を示せ.
- (4) 2 進数で表された 2 桁の数  $X = x_1x_0$  と  $Y = y_1y_0$  の差  $Z = X - Y$  を求める図 6 のような回路を D とする. ただし負数  $-Y$  は 2 の補数を用いて  $-Y = \bar{y}_1\bar{y}_0 + 01$  と定義し, 差の演算は負数  $-Y$  を用いて,  $Z = X + (-Y)$  と定義する. 全加算器回路 FA と必要に応じて図 1 に示すゲート類を用いて回路 D を構成し, その回路図を示せ.
- (5) 入力  $(x_0, y_0, x_1, y_1, w)$  に対し,  $w = 0$  のときには出力として問(3)で求めた和を,  $w = 1$  のときには出力として問(4)で求めた差を出力する図 7 のような回路を SD とする. 全加算器回路 FA と図 1 に示すゲート類を使って, それぞれの数が最小になるように回路 SD を構成し, その回路図を示せ.

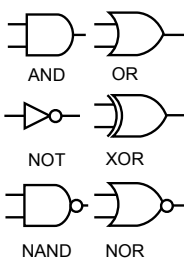


図 1

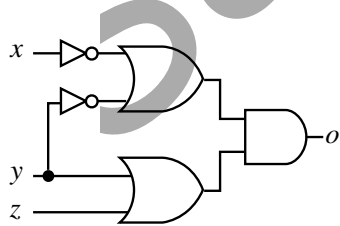


図 2

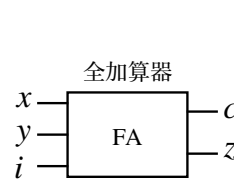


図 3

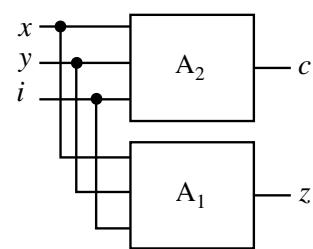


図 4

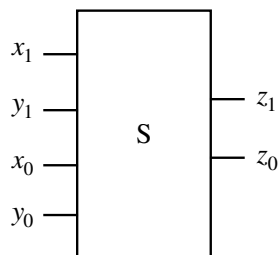


図 5

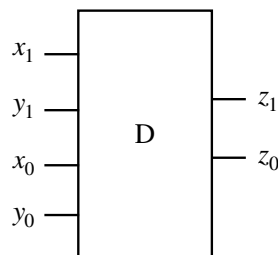


図 6

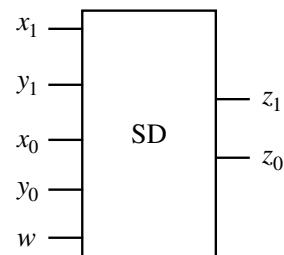


図 7

II.  $n$ 個の相異なる非負の整数の配列  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  を直接書き換え、昇順にソートした配列を得る以下のアルゴリズム  $f(X)$  を考える：

1.  $n = 0$  もしくは  $n = 1$  のとき、何もしない。
2.  $n = 2$  のとき、 $x_1 < x_2$  ならば何もしない。それ以外は  $X$  を  $X = (x_2, x_1)$  と書き換える。
3.  $n > 2$  のとき、 $X$  から関数  $h(X)$  によって  $X$  の要素  $p = h(X)$  を一つ選ぶ。  $X$  に含まれる  $p$  より小さいすべての要素からなる配列を  $X_1$ 、 $X$  に含まれる  $p$  より大きいすべての要素からなる配列を  $X_2$  とし、 $X = (X_1, p, X_2)$  と書き換える。そして  $X$  の部分配列  $X_1$  および  $X_2$  に対し、 $f$  をそれぞれ  $f(X_1)$ 、 $f(X_2)$  と再帰的に適用する。

以下の間に答えよ。

- (1) 図 8 は、 $h(X) = x_1$  でかつ  $X_1$  と  $X_2$  の要素の並び順が  $X$  での並び順に従う場合のアルゴリズム  $f$  の振る舞いを、配列  $X = (6, 9, 3, 5, 1, 7)$  に対して例示したものである。  $X = (6, 8, 4, 5, 2, 3, 1, 9, 7)$  の時のアルゴリズムの振る舞いを図 8 にならって示せ。
- (2) 1 から 9 までの整数をそれぞれ一つずつ含む配列  $X$  を考える。  $h(X) = x_1$  でかつ  $X_1$  と  $X_2$  の要素の並び順が  $X$  での並び順に従うとする。この時、 $f(X)$  の再帰呼出し回数が最大となる配列のうちで 9 桁の整数として評価した時に最も大きい値をもつもの  $X_{\max}$  を求めよ。また、再帰呼出し回数が最も少なくなる配列のうちで 9 桁の整数として評価した時に最も大きい値をもつもの  $X_{\min}$  を求めよ。ただし、 $X = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$  を 9 桁の整数として評価した時の値は 123456789 とする。
- (3)  $h(X) = x_1$  とする。長さ  $n$  の配列  $X$  に対して  $f(X)$  の最悪計算量のオーダーを途中過程も含めて導出せよ。計算量は比較操作に関して評価し、それ以外の操作の計算量は無視できるとする。
- (4) プログラム 1 はアルゴリズム  $f(X)$  の C 言語による実装の一つである。 [A], [B], [C] に入るコードを記述せよ。
- (5)  $h(X)$  として  $X$  から一様ランダムに選んだ要素を  $p$  とする関数を考える。この時、 $f(X)$  の平均計算量のオーダーを  $n$  の関数として答えよ。また、そうなる理由を詳細に記述せよ。

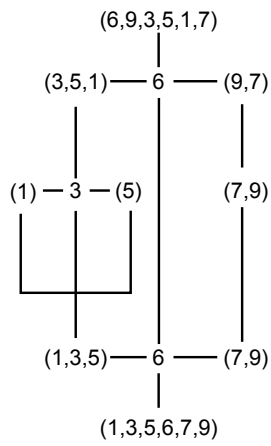


图 8

```

/* Program1 */
void swap(int X[], int i, int j){
    int tmp = X[i]; X[i] = X[j]; X[j] = tmp;
}
int partition (int X[], int left, int right) {
    int pivot = X[left];
    int i = right;
    for (int j = right; j >= left+1; j--) {
        if (X[j] >= pivot) {
            [A]
            i--;
        }
    }
    [B]
    return i;
}
void f(int X[], int left, int right) {
    if (left < right) {
        int pivotpos = partiti (X, left, right);
        [C]
    }
}
int main (void) {
    int X[10] = {9, 6, 1, 7, 2, 3, 4, 5, 0, 8};
    f(X, 0, sizeof(X) / sizeof(X[0]) - 1);
    return 0;
}

```

## 問題 5

I. 図 1 に示すような 1 次元ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x \leq 0) \\ 0 & (0 < x < d) \\ +\infty & (x \geq d) \end{cases}$$

で閉じ込められた粒子の固有状態について考える。粒子の質量を  $m$ 、粒子のエネルギーを  $E$ 、虚数単位を  $i$ 、プランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割ったものを  $\hbar$  とする。以下の問に答えよ。

- (1)  $0 < x < d$  の領域における時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。また、 $x = 0$  および  $d$  における波動関数の境界条件を示せ。
- (2) 問(1)のシュレディンガー方程式を解き、粒子の波動関数を求めよ。
- (3) 位置  $x$  と運動量  $p$  はハイゼンベルクの不確定性原理にしたがうことが知られている。位置の不確かさ  $\Delta x$ 、運動量の不確かさ  $\Delta p$ 、および  $\hbar$  の関係性を不等式で表せ
- (4) 位置  $x$  および運動量  $p$  の期待値  $\langle x \rangle$  および  $\langle p \rangle$  を求めよ。
- (5) ある物理量  $a$  の不確かさは  $\Delta a = \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}$  と表すことができる。これを用いて、 $V(x)$  に閉じ込められている粒子に対して問(3)の不確定性原理が成り立つことを示せ。

次に、図 1 のポテンシャルの右側の障壁高さを有限にした (図 )。このとき、粒子は次のような  $V(x)$  に束縛された状態になった。

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x \leq 0) \\ 0 & (0 < x < d), \\ V_0 & (x \geq d) \end{cases}, \quad V_0 > 0$$

ここで、束縛された状態とは、無限遠方で波動関数が 0 になる状態を指す。

- (6)  $x = d$  における波動関数の境界条件について説明せよ。
- (7)  $x > d$  における波動関数は次のような形で表されることを示せ。

$$\psi(x) = C e^{-Kx} \quad (C \text{ は定数}, K \text{ は実数の定数})$$

さらに  $K$  を  $d$  と  $0 < x < d$  における波動関数の波数  $k$  を用いて表せ。

次に、 $V_0$  を小さくしていき  $V_0 \leq V_1$  になったとき、束縛された状態は現れなくなった。(  $V_0 > V_1$  では、束縛された状態が存在する。 )

- (8) この  $V_1$  を求めよ。

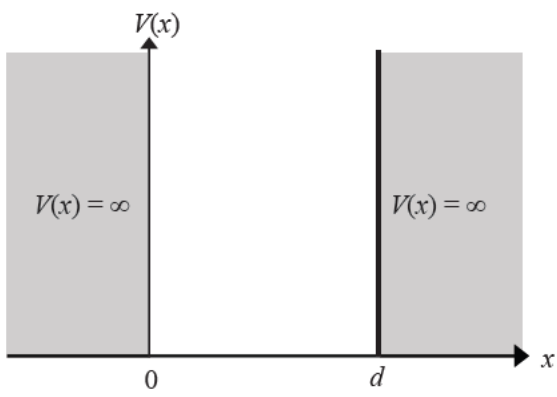


图 1

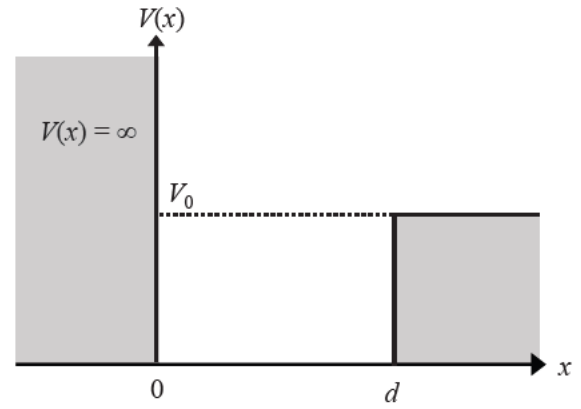


图 2

Sample

II. 固体中の電子の統計分布について考える。電子の質量を $m$ 、電子のエネルギーを $E$ 、虚数単位を $i$ 、絶対温度を $T$ 、ボルツマン定数を $k_B$ 、化学ポテンシャルを $\mu$ 、プランク定数 $h$ を $2\pi$ で割ったものを $\hbar$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 一般的に、素粒子はフェルミ粒子とボーズ粒子の二種類に分けることができる。電子はフェルミ・ディラック分布にしたがうフェルミ粒子である。

(1-i) フェルミ・ディラック分布関数 $f(E)$ を $E$ 、 $T$ 、 $k_B$ 、 $\mu$ を用いて表せ。また、絶対零度( $T = 0$ )および有限の温度( $T > 0$ )のそれぞれの場合について $f(E)$ の概形を描け。

(1-ii) 有限温度( $T > 0$ )におけるフェルミ・ディラック分布関数、ボーズ分布関数およびボルツマン分布関数の概形を同一のグラフ上に示せ。 $(E - \mu)/(k_B T)$ をグラフの横軸にとること。

(2) 固体中の伝導電子のモデルとして、周期的境界条件が成り立つ一辺の長さ $L$ の仮想的な立方体の中の自由電子を考える。

(2-i) 位置 $\mathbf{r}$ における電子の波動関数は次の形で表される。波数ベクトル $\mathbf{k}$ の成分 $k_x$ 、 $k_y$ 、 $k_z$ がとりうる値を求めよ。

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

(2-ii) 波数空間において波数ベクトル $\mathbf{k}$ の大きさが $k_0$ 以下である状態の数を $k_0$ および $L$ を用いて表せ。ただし、 $L$ は十分に大きく $L \gg 2\pi/\lambda_0$ が成り立つものとする。

(2-iii) 状態密度 $D(E)$ を求めよ。

(2-iv) フェルミエネルギー（絶対零度での化学ポテンシャル）を $m$ 、 $\hbar$ 、 $L$ および立方体の中の全電子数 $N$ を用いて表せ。

(2-v) 低温において熱の影響を受ける電子の割合を考え、低温における電子比熱が温度に比例する理由を定性的に説明せよ。また古典論から求められる電子比熱との違いとその理由について説明せよ。解答は全体で5行程度とする。

## 問題 6

I. 図 1 に示す制御系について以下の間に答えよ.  $t$  を時間,  $s$  をラプラス変換の変数,  $j$  を虚数単位とする.  $K_1, K_2, a$  は実数であり,  $r(t), u(t), y(t)$  のラプラス変換をそれぞれ  $R(s), U(s), Y(s)$  とする.  $P(s)$  は以下に示す微分方程式で表される制御対象であるとする.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = 2u(t)$$

- (1)  $U(s)$  から  $Y(s)$  への伝達関数を求めよ.
- (2)  $C_1(s) = K_1, C_2(s) = 0$  のとき, 閉ループ系を安定にする  $K_1$  の範囲を求めよ.
- (3)  $C_1(s) = K_1, C_2(s) = 0$  のとき,  $0 < K_1 < \infty$  について閉ループ系の根軌跡を描け. 分岐点や安定限界点がある場合には, そのときの  $K_1$  と根軌跡上の座標  $s$  を求めよ.
- (4)  $C_1(s) = K_1, C_2(s) = K_2s, K_2 = 1$  のとき, 閉ループ系の特性方程式を求めよ. さらに閉ループ系を安定にする  $K_1$  の範囲を求めよ.
- (5)  $C_1(s) = K_1, C_2(s) = K_2s, K_2 \neq 0$  のとき, クロスオーバー角周波数  $\omega_c$  を  $1 \text{ rad/s}$ , 位相余裕を  $45^\circ$  にする  $K_1, K_2$  を求めよ.  
 ヒント: 点線部の伝達関数を  $G(s)$  とするとき,  $|G(j\omega_c)| = 1$  を使って良い.
- (6)  $C_1(s) = K_1(s + a), C_2(s) = 0$  に対して, クロスオーバー角周波数  $\omega_c$  を  $1 \text{ rad/s}$ , 位相余裕を  $45^\circ$  にする  $K_1, a$  を求めよ.
- (7) 問(2)の制御系を問(5)や問(6)の制御系と比較し  $K_2$  や  $(s + a)$  を導入したことの利点を, 根軌跡を用いて考察せよ.

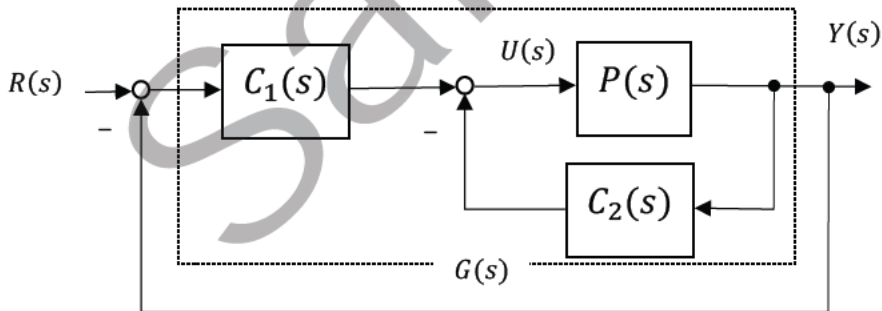


図 1

II. 図 2 (A) のような対称三相回路と図 2 (B) のような単相交流回路がある.  $j$  を虚数単位とする.

(A) と (B) において等しい長さの電線で電力を送るものとして電線材料の総分量を等しくする. (A) の場合の電線一本あたりの抵抗を  $3 \Omega$  とすると (B) の一本あたりの抵抗値は  $2 \Omega$  になる. 負荷インピーダンスを  $Z = (6 + j8) \Omega$ , 負荷の線間電圧実効値を  $200 \text{ V}$  とするとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 三相負荷が消費する有効電力  $P_A$  と単相負荷が消費する有効電力  $P_B$  をそれぞれ求めよ.
- (2) (A), (B) それぞれの場合の電線による電力損失  $P_{A\text{loss}}, P_{B\text{loss}}$  を求め, この結果から分かることを簡単に説明せよ.
- (3) 電源の角周波数を  $\omega$ , 時間を  $t$  とするとき, 三相負荷における瞬時電力  $p_A(t)$  と単相負荷における瞬時電力  $p_B(t)$  の式を導出し, それらの波形を図示した上で, それぞれ問(1)で求めた  $P_A, P_B$  との関係を説明せよ. 電源電圧の位相は適切に定義してよい.

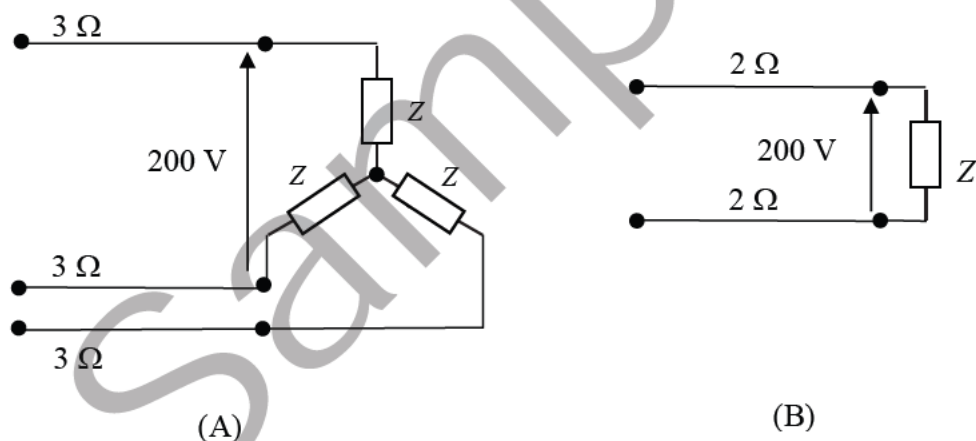


図 2

## Problem 1

I. A conducting sphere of radius  $a$  placed in vacuum has a charge  $Q$ . Let the vacuum permittivity be  $\epsilon_0$  and the electric potential at infinity be zero. Answer the following questions. You may use the following formulae for vector analysis in polar coordinates  $(r, \theta, \varphi)$ .

$$\text{grad}f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right), \quad \text{div}A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- (1) Find the electric field strength at a distance  $r$  from the center of the sphere.
- (2) Find the electric potential at a distance  $r$  from the center of the sphere.

Next, free charge is uniformly distributed with volume charge density  $\rho_0 (> 0)$  in a dielectric sphere of radius  $a$  and relative permittivity  $\epsilon_r = 3$  placed in vacuum, as shown in Fig. 1. Answer the following questions.

- (3) Find the electric field strength at a distance  $r$  from the center of the sphere and draw its graph as a function of  $r$ .
- (4) Find the electrostatic energy stored in this system.
- (5) Find the magnitude and direction of polarization  $\mathbf{P}$  at a distance  $r (< a)$  from the center of the sphere. Then, based on the result, find the volume polarization charge density at  $r (< a)$  and the surface polarization charge density on the surface of the sphere.
- (6) Next, the free charge is not uniformly distributed in the dielectric sphere but is distributed with volume charge density  $\rho(r)$  depending on the distance  $r$  from the center of the sphere. When the electric potential in the sphere  $V(r)$  at  $r (< a)$  is given by the following equation, find  $\rho(r)$ .

$$V(r) = V_0 \left( 1 - \frac{r^3}{10a^3} \right)$$

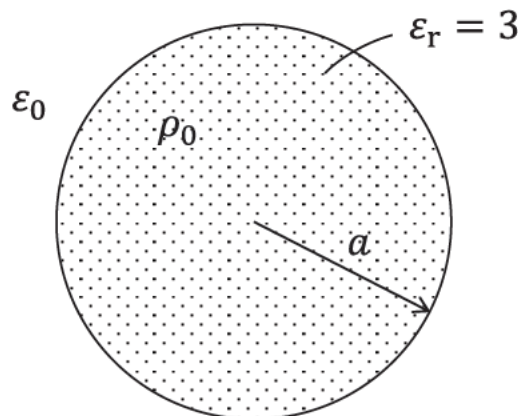


Fig. 1

II. Let the vacuum permeability be  $\mu_0$ . Answer the following questions.

- (1) Two sufficiently-long, infinitely-thin, parallel straight conducting wires are placed in vacuum separated by a distance  $d$ . The two wires carry equal constant currents  $I$  in the same directions. Find the magnitude and direction of the force per unit length on the wire.
- (2) In the case of Question (1), sketch the magnetic lines of force in a plane perpendicular to the wires. Sketch them also when the constant currents  $I$  flow in the opposite directions to each other in the two conducting wires.

Next, as shown in Fig. 2, a sufficiently-long conducting cylinder of radius  $a$  and uniform permeability  $\mu$  is placed in vacuum. The conducting cylinder carries a constant current  $I_1 (> 0)$  which is uniformly distributed in the cross-section of the conducting cylinder. A single-turn circular coil of radius  $b$  made from an infinitely-thin wire is put on a plane containing the center axis of the conducting cylinder. The circular coil carries a constant current  $I_2 (> 0)$  in the direction shown in Fig. 2. Let the distance between the center axis of the conducting cylinder and the center of the circular coil be  $D$  ( $D \gg a$  and  $D \gg b$ ). Answer the following questions.

- (3) Find the strength of the magnetic field produced by the current  $I_1$  at a distance  $r$  from the center axis of the conducting cylinder.
- (4) Find the magnetic field energy per unit length stored inside the conducting cylinder. Then, based on the result, find the internal inductance per unit length of the conducting cylinder.
- (5) Find the mutual inductance between the conducting cylinder and the circular coil. As  $D \gg b$ , you can approximate that the magnetic flux linking the circular coil created by the current  $I_1$  is equal to the product of the magnetic flux density at the center of the circular coil created by the current  $I_1$  and the area of the circular coil.
- (6) Based on the result of Question (5), find the magnitude and direction of the force acting on the circular coil.

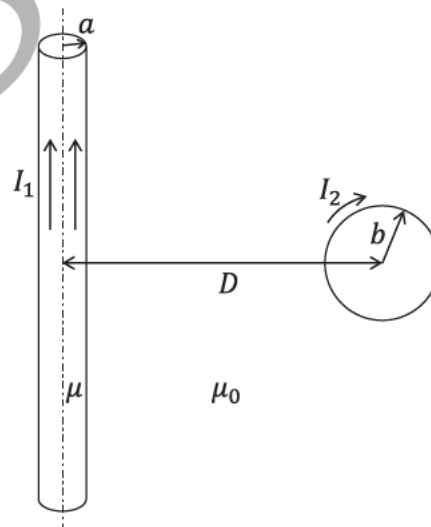


Fig. 2

## Problem 2

I. Answer the following questions on electrical circuits. Symbols used in figures are defined in Legend.

The circuit is configured as shown in Fig. 1. The switch  $S$  had been opened for a sufficiently long time and then was closed at time  $t = 0$ . Answer the following questions for the current  $i(t)$  at  $t > 0$ .

- (1) Write the equation which the current  $i(t)$  satisfies.
- (2) Find the condition that the circuit should satisfy for the current  $i(t)$  to be a damped oscillation.
- (3) Assuming  $R_{S1} = R_1 = 1 \Omega$ ,  $L_1 = 1 \text{ H}$ ,  $C_1 = 1 \text{ F}$ , and  $V_{S1} = 1 \text{ V}$ , find the equation of the current  $i(t)$ .

Next, the circuit is configured as shown in Fig. 2. The angular frequency of the sinusoidal AC voltage source  $V_i(t)$  is  $\omega$ .

- (4) Find  $L_2$  and  $C_2$  that maximize the power supplied to the resistor  $R_2$ , using resistances  $R_{S2}$  and  $R_2$  and the angular frequency  $\omega$ . Assume  $R_2 > R_{S2}$ .

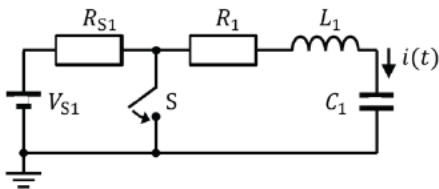


Fig. 1

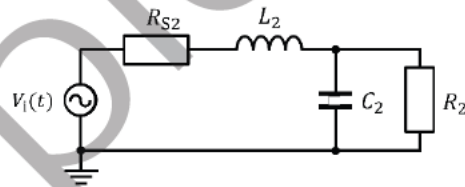


Fig. 2

Next, the circuit is configured as shown in Fig. 3. At time  $t < 0$ , only switch  $S_5$  had been closed. At time  $t \geq 0$ , every  $\Delta T$  second switches  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ , and  $S_5$  are opened and closed to switch the following two states.

State 1: At time  $t = 2M\Delta T$  ( $M = 0, 1, 2, \dots$ ), switches  $S_1$ ,  $S_4$ , and  $S_5$  are closed and switches  $S_2$  and  $S_3$  are opened.

State 2: At time  $t = (2M + 1)\Delta T$ , switches  $S_2$  and  $S_3$  are closed and switches  $S_1$ ,  $S_4$ , and  $S_5$  are opened.

Here, Fig. 3 shows the circuit switching from State 2 to State 1.

- (5) Find the relationship among  $L_3$ ,  $R_3$ , and  $C_3$  giving the current  $I_L$  to be a decaying waveform without oscillation at time  $t \geq 0$ .

- (6) Assuming  $R_3 = 1 \Omega$ ,  $C_3 = C_4 = 1 \text{ F}$ ,  $L_3 = 0 \text{ H}$ ,  $V_{S2} = 1 \text{ V}$ , and  $\Delta T = 1$  second, calculate the maximum voltage  $V_M$  at the node  $N_1$ . You may use  $e^{-1} = 0.37$ .

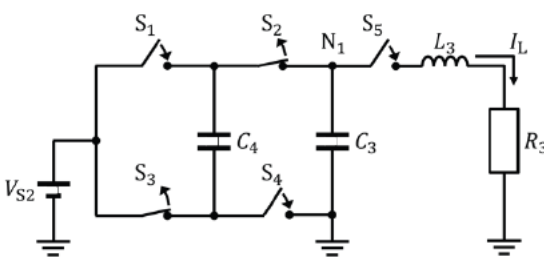
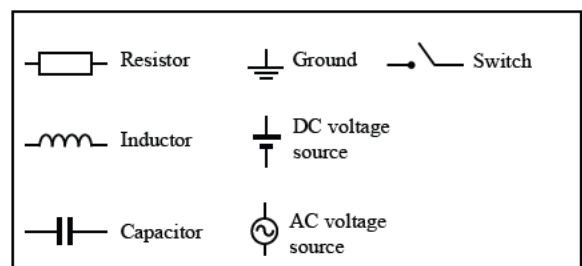


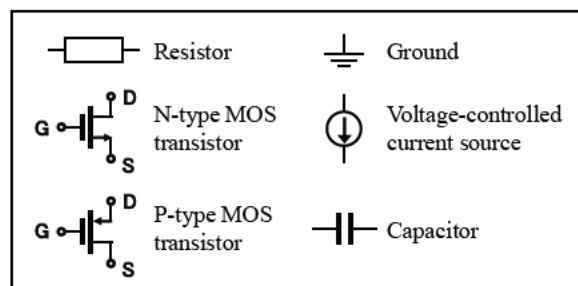
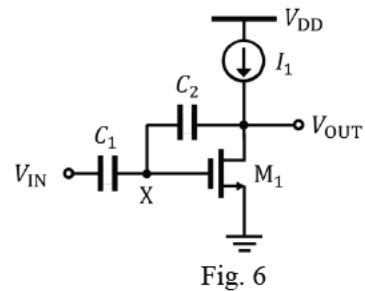
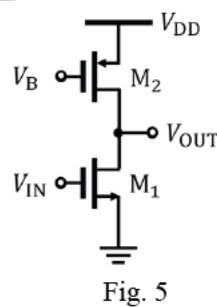
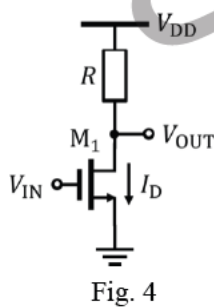
Fig. 3



Legend

II. Answer the following questions on circuits using MOSFET. Symbols used in figures are defined in Legend. Note that the body bias effect is negligible in following questions. Here,  $V_{TH}$  denotes the threshold voltage of transistors,  $g_{m1}$  denotes the transconductance of transistor  $M_1$ , and  $g_{m2}$  denotes the transconductance of transistor  $M_2$ .

- (1) The voltage amplifier circuit is configured as shown in Fig. 4.
  - (1-i) Let the drain current of the transistor  $M_1$  be  $I_D$ . Using parameters  $R$ ,  $I_D$ ,  $V_{DD}$ ,  $V_{IN}$ , and  $V_{TH}$ , write the condition for the transistor  $M_1$  to operate in the saturation region.
  - (1-ii) When the transistor  $M_1$  operates in the saturation region and the channel length modulation effect is negligible, draw a small signal equivalent circuit model of this amplifier circuit. Also, find the small signal gain of this circuit.
  - (1-iii) When the transistor  $M_1$  operates in the saturation region and the channel length modulation effect is NOT negligible, draw a small signal equivalent circuit model of this amplifier circuit. Also, find the small signal gain of this circuit. Note that the channel length modulation effect of transistor  $M_1$  is approximated as the linear resistance  $r_{o1}$ .
- (2) Find the small signal gain of the amplifier circuit shown in Fig. 5. Note that the transistor  $M_2$  is biased to operate in the saturation region. The channel length modulation effect of transistor  $M_2$  is approximated as the linear resistance  $r_{o2}$ .
- (3) The amplifier circuit is configured as shown in Fig. 6. Assuming the transistor  $M_1$  operates in the saturation region, and the small amplitude AC signal is input
  - (3-i) Find the small signal gain  $V_{OUT}/V_X$ , where  $V_X$  is the signal at the node X. The channel length modulation effect of transistor  $M_1$  is approximated as the linear resistance  $r_{o1}$ .
  - (3-ii) Find the small signal gain  $V_{OUT}/V_{IN}$  focusing on the currents that flow through  $C_1$  and  $C_2$ .
- (4) Describe one advantage and one disadvantage of each amplifier circuit shown in Figures 4, 5, and 6.



Legend

### Problem 3

I. Answer the following questions on information theory. You may use the following approximations:  $\log_2 3 = 1.6$ , and  $\log_2 5 = 2.3$ .

- (1) Consider measuring multiple coins using a balance. Each measurement by the balance has three possible outcomes: balanced, left side lighter, or right side lighter. Determine the maximum amount of information obtained from each measurement.

Suppose that we have 12 coins, among which there may or may not be one counterfeit coin. If there is a counterfeit coin, it may be either heavier or lighter than the other coins. There are 25 possible outcomes: “12 outcomes where there is a heavier counterfeit coin,” “12 outcomes where there is a lighter counterfeit coin,” and “1 outcome where there is no counterfeit coin.” Assume that the occurrence probabilities of all possible outcomes are equal. Let  $X$  be a random variable describing the possible outcomes of the 12 coins, and  $H(X)$  be the entropy.

- (2)  $H(X)$  quantifies the amount of information necessary to identify the counterfeit coin if any, and to judge if it is heavier or lighter. Obtain  $H(X)$ .
- (3) Using the balance multiple times, we wish to identify the counterfeit coin if any, and to judge if it is heavier or lighter. Explain how we can use the results of Question (1) and Question (2) to determine the number of measurements necessary for it.

Suppose that we weigh  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ) coins against other  $m$  coins using the balance. We would like to consider the amount of mutual information  $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$  obtained from the measurement. Here,  $Y$  is a random variable describing the outcome of the measurement, where  $Y = B$  means balanced,  $Y = L$  means left side is lighter, and  $Y = R$  means right side is lighter.  $H(X|Y)$  is the conditional entropy.  $\Pr(A)$  is the occurrence probability of an event  $A$ .

- (4) Express  $\Pr(Y = L)$  and  $\Pr(Y = B)$  as a function of  $m$ .
- (5) Express  $H(X|Y)$  as a function of  $\Pr(Y = L)$ ,  $\Pr(Y = R)$ ,  $\Pr(Y = B)$ ,  $H(X|Y = L)$ ,  $H(X|Y = R)$ , and  $H(X|Y = B)$ .
- (6) By obtaining  $H(X|Y = L)$ ,  $H(X|Y = R)$ , and  $H(X|Y = B)$ , we can calculate  $I(X; Y)$  from the results of Question (2), Question (4), and Question (5). Explain how we can use  $I(X; Y)$  to determine the number of coins put on each side in the first measurement.

II. In wireless communication systems, we need to design a digital filter to remove the effect of delay waves due to multipath. Assume that multipath is modeled as a channel impulse response shown in Fig. 1: two-path channel model consists of one direct wave and one delay wave, and the delay wave is obtained by multiplying the direct wave by a real constant  $a$ . Let  $x(n)$  be a transmitted signal and  $y(n)$  be a received signal. Here,  $x(n)$  and  $y(n)$  are discrete-time signals, and  $n$  is an integer.

- (1) Express the difference equation describing the relationship between  $x(n)$  and  $y(n)$ .
- (2) Find  $y(n)$  when  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = -2$ ,  $x(n) = 0$  ( $n \neq 0, 1$ ), and  $a = 0.8$ .
- (3) Determine the impulse response  $g(n)$  of a digital filter that will recover  $x(n)$  from  $y(n)$ .
- (4) Show the condition for the digital filter of Question (3) to be stable.

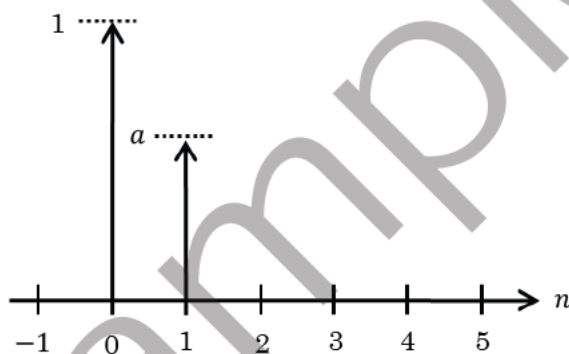


Fig. 1

## Problem 4

I. Answer the following questions on logic circuits. Lower italic letters such as  $x$  and  $y$  represent logical variables. Also,  $x \cdot y$ ,  $x + y$ ,  $x \oplus y$ , and  $\bar{x}$  represent logical conjunction (AND), logical disjunction (OR), exclusive disjunction (XOR), and negation (NOT), respectively. Fig. 1 shows the symbols for logic gates used in circuit diagrams. Use these symbols in your answers.

- (1) Complete the truth table for the logical function  $o = C(x, y, z)$  implemented by the circuit in Fig. 2. Also, obtain the logical formula of  $C(x, y, z)$  in the most simplified sum-of-products form.
- (2) Suppose that we design a full adder circuit FA, which receives 1-digit binary numbers  $x$ ,  $y$ , and a carry  $i$  as the input and compute their sum  $z$  and the carry  $c$  as shown in Fig. 3. Obtain the representations of  $z$  and  $c$  as logical functions of  $(x, y, i)$  in the most simplified sum-of-products form. Suppose that Fig. 4 is an implementation of FA. Draw the circuit for  $A_1$  in Fig. 4 using only XOR gates, and draw the circuit for  $A_2$  in Fig. 4 using only NAND gates.

In the following, we design circuits S, D, and SD using the full adder circuit FA in Fig. 3.

- (3) Suppose that a circuit S computes the sum of 2-digit binary numbers  $X = x_1x_0$  and  $Y = y_1y_0$ . As in Fig. 5,  $(x_0, y_0, x_1, y_1)$  is the input to S. For the sum  $Z = X + Y$  and its binary representation  $Z = z_2z_1z_0$ , the output of S is  $(z_0, z_1)$ . Draw the circuit S using the full adder circuits FA and the gates in Fig. 1 if necessary.
- (4) Suppose that a circuit D shown in Fig. 6 computes the difference  $Z = X - Y$  of 2-digit binary numbers  $X = x_1x_0$  and  $Y = y_1y_0$ . Here, the negative number  $-Y$  is defined by the two's complement as  $-Y = \bar{y}_1\bar{y}_0 + 01$ . Also the difference is defined as  $Z = X + (-Y)$  by using the negative number  $-Y$ . Draw the circuit D using the full adder circuits FA and the gates in Fig. 1 if necessary.
- (5) Suppose that, for input  $(x_0, y_0, x_1, y_1, w)$ , a circuit SD shown in Fig. 7 outputs the sum obtained in Question (3) when  $w = 0$  and the difference obtained in Question (4) when  $w = 1$ . Draw the circuit SD with the smallest numbers of both the full adder circuits FA and the gates in Fig. 1.

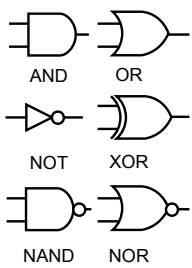


Fig. 1

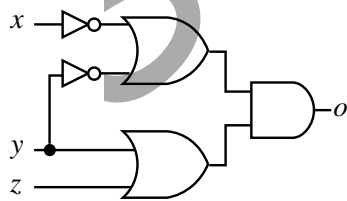


Fig. 2

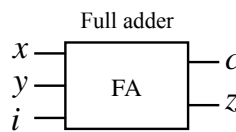


Fig. 3

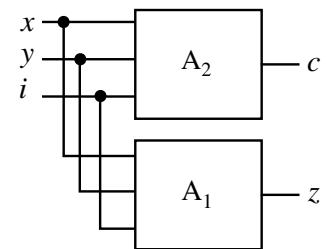


Fig. 4

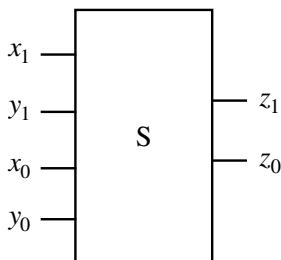


Fig. 5

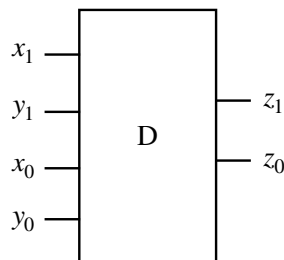


Fig. 6

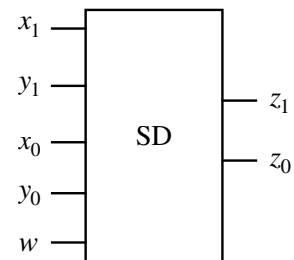


Fig. 7

II. Consider the following algorithm  $f(X)$ , which overwrites an input array  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  of  $n$  distinct non-negative integers to sort its components in ascending order:

1. for  $n = 0$  or  $n = 1$ , do nothing.
2. for  $n = 2$ , do nothing if  $x_1 < x_2$ , and overwrite  $X$  as  $X = (x_2, x_1)$ , otherwise.
3. for  $n > 2$ , select an element  $p$  of  $X$  by using a function  $h(X)$  as  $p = h(X)$ . Let  $X_1$  be an array consisting of all the elements in  $X$  being smaller than  $p$ , and  $X_2$  be an array consisting of all the elements in  $X$  being greater than  $p$ . Overwrite  $X$  as  $X = (X_1, p, X_2)$ . Then, recursively apply  $f$  to the subarrays  $X_1$  and  $X_2$  in  $X$  as  $f(X_1)$  and  $f(X_2)$ , respectively.

Answer the following questions.

- (1) Fig. 8 exemplifies the operation of  $f$  for an array  $X = (6, 9, 3, 5, 1, 7)$  when  $h(X) = x_1$  and the order of the elements in  $X_1$  and  $X_2$  inherits their order in  $X$ . Draw the operation of  $f$  for  $X = (6, 8, 4, 5, 2, 3, 1, 9, 7)$  by following the diagram in Fig. 8.
- (2) Suppose that an array  $X$  contains each integer from 1 to 9, once each. Also, assume that  $h(X) = x_1$  and the order of the elements in  $X_1$  and  $X_2$  inherits their order in  $X$ . Obtain the array  $X_{\max}$  that maximizes the number of recursive calls of  $f(X)$  and has the largest value evaluated as a 9-digit integer. Also obtain the array  $X_{\min}$  that minimizes the number of recursive calls of  $f(X)$  and has the largest value evaluated as a 9-digit integer. Note that the value of  $X = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$  evaluated as a 9-digit integer is 123456789.
- (3) Assume that  $h(X) = x_1$ . For an array  $X$  with length  $n$  obtain the order of worst-case time complexity by supplementing the intermediate steps of its derivation. In the derivation, evaluate the order of the time complexity in terms of comparisons, while ignoring the complexity of the other operations.
- (4) Program 1 is an implementation of the algorithm  $f(X)$  in the C programming language. Describe the codes that should be in the blanks, [A], [B], and [C].
- (5) Suppose that  $h(X)$  is a function that returns an element  $p$  selected from  $X$  uniformly and randomly. Answer the order of the average time complexity of  $f(X)$  as a function of  $n$ . In addition, describe its reason in detail.

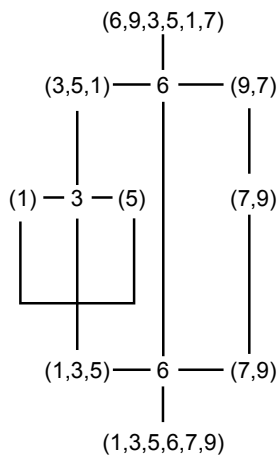


Fig. 8

```

/* Program1 */
void swap(int X[], int i, int j){
    int tmp = X[i]; X[i] = X[j]; X[j] = tmp;
}
int partition (int X[], int left, int right) {
    int pivot = X[left];
    int i = right;
    for (int j = right; j >= left+1; j--) {
        if (X[j] >= pivot) {
            [A]
            i--;
        }
    }
    [B]
    return i;
}
void f(int X[], int left, int right) {
    if (left < right) {
        int pivotpos = partition(X, left, right);
        [C]
    }
}
int main (void) {
    int X[10] = {9, 6, 1, 7, 2, 3, 4, 5, 0, 8};
    f(X, 0, sizeof(X) / sizeof(X[0]) - 1);
    return 0;
}

```

## Problem 5

I. Consider the eigenstates of a particle confined by the following one-dimensional potential as shown in Fig. 1.

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x \leq 0) \\ 0 & (0 < x < d) \\ +\infty & (x \geq d) \end{cases}$$

Here,  $m$  is the particle mass,  $E$  is the particle energy,  $i$  is the imaginary unit,  $\hbar$  is Planck's constant  $h$  divided by  $2\pi$ . Answer the following questions.

- (1) Write the time-independent Schrödinger equation in the region of  $0 < x < d$ . In addition, show the boundary conditions for the wave function at  $x = 0$  and  $d$ .
- (2) Solve the Schrödinger equation in Question (1) and find the wave function of a particle.
- (3) The position  $x$  and momentum  $p$  are known to obey the Heisenberg's uncertainty principle. Express the relation among the uncertainty of the position  $\Delta x$ , the uncertainty of the momentum  $\Delta p$ , and  $\hbar$  in terms of an inequality.
- (4) Find the expectation values  $\langle x \rangle$  and  $\langle p \rangle$  of the position  $x$  and the momentum  $p$ , respectively.
- (5) The uncertainty of a physical quantity  $a$  is expressed as  $\Delta a = \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}$ . Using this equation, show that the uncertainty relation in Question (3) holds for the particle confined by the potential  $V(x)$ .

Next, consider the case where a barrier height on the right side of the potential in Fig. 1 is finite as shown in Fig. 2 and where a particle is in the bound state in the following potential  $V(x)$ .

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x \leq 0) \\ 0 & (0 < x < d), \\ V_0 & (x \geq d) \end{cases}, \quad V_0 > 0$$

Here, the bound state means that the wave function becomes zero at infinity.

- (6) Explain the boundary conditions for the wave function at  $x = d$ .
- (7) Show that the wave function at  $x > d$  is given by the following form:

$$\psi(x) = C e^{-Kx} \quad (C \text{ is a constant and } K \text{ is a real constant}).$$

In addition, express  $K$  using  $d$  and the wave number  $k$  of the wave function for  $0 < x < d$ .

Next,  $V_0$  is lowered, and when  $V_0 \leq V_1$ , bound states disappear. (For  $V_0 > V_1$ , bound states exist.)

- (8) Find  $V_1$ .

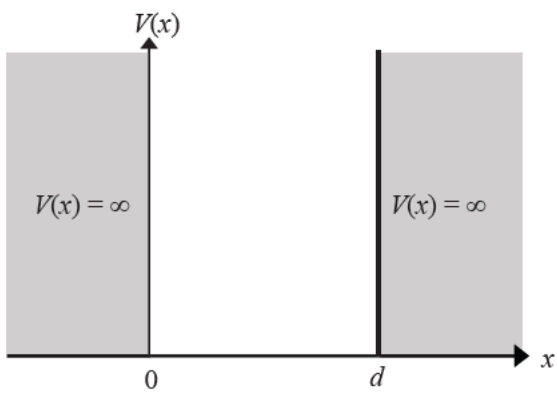


Fig. 1

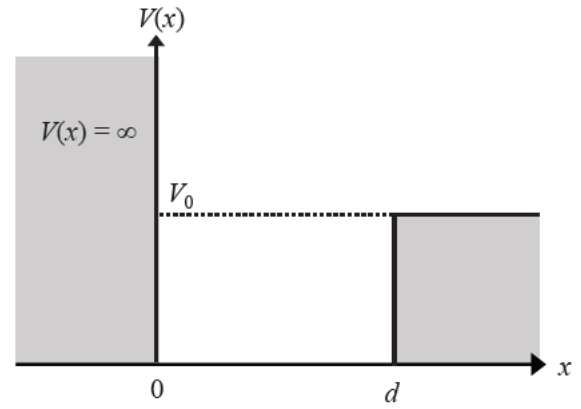


Fig. 2

Sample

II. Consider the statistical distribution of electrons in solids. Here,  $m$  is the electron mass,  $E$  is the electron energy,  $i$  is the imaginary unit,  $T$  is the absolute temperature,  $k_B$  is the Boltzmann constant,  $\mu$  is the chemical potential, and  $\hbar$  is Planck's constant  $h$  divided by  $2\pi$ . Answer the following questions.

(1) In general, elementary particles are divided into two groups: fermions and bosons. Electrons are fermions that obey the Fermi-Dirac distribution.

(1-i) Express the Fermi-Dirac function  $f(E)$  using  $E$ ,  $T$ ,  $k_B$ , and  $\mu$ . In addition, sketch the approximate graph of  $f(E)$  in the cases:  $T = 0$  (absolute zero) and  $T > 0$  (finite temperature).

(1-ii) Draw the approximate forms of the Fermi-Dirac distribution function, the Bose distribution function, and the Boltzmann distribution function at finite temperature ( $T > 0$ ) in the same graph with  $(E - \mu)/(k_B T)$  on the horizontal axis.

(2) As a model of conduction electrons in solids, we consider free electrons in the hypothetical cube with a length of  $L$  on each side where the periodic boundary conditions hold.

(2-i) The wave function of the electron at the position  $\mathbf{r}$  is given by the following form. Find the possible values of the components  $k_x$ ,  $k_y$ , and  $k_z$  of the wave vector  $\mathbf{k}$ .

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

(2-ii) In the wave number space, express the number of states with a wave vector  $\mathbf{k}$  whose magnitude is smaller than  $k_0$ , using  $k_0$  and  $L$ . Assume that  $L$  is sufficiently large, and therefore  $L \gg 2\pi/k_0$  holds.

(2-iii) Find the density of states  $D(E)$ .

(2-iv) Express the Fermi energy (chemical potential at absolute zero) using  $m$ ,  $\hbar$ ,  $L$ , and the total number  $N$  of electrons in the cube.

(2-v) Considering the fraction of electrons that are affected by heat at low temperatures, explain qualitatively the reason why the specific heat of electrons at low temperatures is proportional to temperature. In addition, explain the difference from the specific heat of electrons obtained from the classical theory and the reason for the difference. Write your answer in about 5 lines in total.

## Problem 6

I. Answer the following questions on control systems in Fig. 1. Let  $t$  denote the time,  $s$  denote a variable of the Laplace transform, and  $j$  denote the imaginary unit. Suppose  $K_1$ ,  $K_2$  and  $a$  are real numbers. Let  $R(s)$ ,  $U(s)$ , and  $Y(s)$  denote the Laplace transforms of  $r(t)$ ,  $u(t)$ , and  $y(t)$ , respectively. The plant  $P(s)$  is expressed by the following differential equation.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = 2u(t)$$

- (1) Find the transfer function from  $U(s)$  to  $Y(s)$ .
- (2) For  $C_1(s) = K_1$  and  $C_2(s) = 0$ , find the range of  $K_1$  that makes the closed-loop system stable.
- (3) For  $C_1(s) = K_1$  and  $C_2(s) = 0$ , draw the root locus of the closed-loop system for  $0 < K_1 < \infty$ . If there are bifurcation points or stability limit points, find  $K_1$  and the coordinate  $s$  on the root locus at the points.
- (4) For  $C_1(s) = K_1$ ,  $C_2(s) = K_2s$ , and  $K_2 = 1$ , find the characteristic-equation of the closed-loop system. Then, find the range of  $K_1$  that makes the closed-loop system stable.
- (5) For  $C_1(s) = K_1$ ,  $C_2(s) = K_2s$ , and  $K_2 \neq 0$ , find  $K_1$  and  $K_2$  such that the crossover angular frequency  $\omega_c$  is 1 rad/s and the phase margin is  $45^\circ$ .  
Hint: Let  $G(s)$  be the transfer function in the dotted box. You may use  $|G(j\omega_c)| = 1$ .
- (6) For  $C_1(s) = K_1(s + a)$  and  $C_2(s) = 0$ , find  $K_1$  and  $a$  such that the crossover angular frequency  $\omega_c$  is 1 rad/s and the phase margin is  $45^\circ$ .
- (7) By comparing the control system of Question (2) with the control systems of Questions (5) and (6), discuss the advantage of introducing  $K_2$  and  $(s + a)$  using root loci.

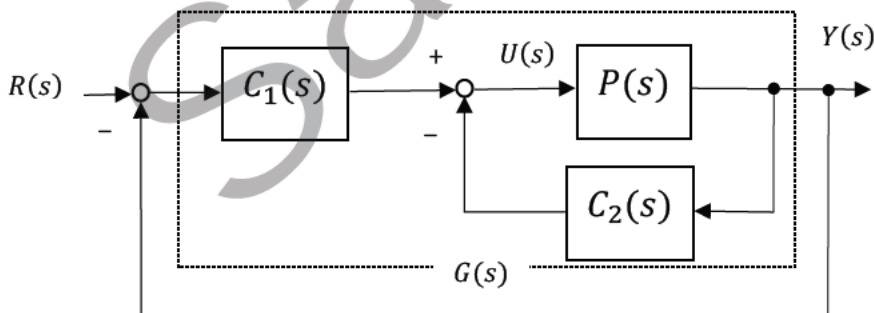


Fig. 1

II. There are a symmetrical three-phase circuit as shown in Fig. 2(A) and a single-phase AC circuit as shown in Fig. 2(B). Let  $j$  denote the imaginary unit.

Assume that the power is transmitted by wires of equal length and the total amount of wire material is the same in (A) and (B). In this case, when the resistance per wire in case (A) is  $3\ \Omega$ , the resistance per wire in case (B) is  $2\ \Omega$ . When the load impedance is  $Z = (6 + j8)\ \Omega$  and the effective line voltage of the load is  $200\ \text{V}$ , answer the following questions.

- (1) Find the active power  $P_A$  and  $P_B$  consumed by the three-phase load and single-phase load, respectively.
- (2) Find the power loss  $P_{A\text{loss}}$  and  $P_{B\text{loss}}$  due to the wire in each of the cases (A) and (B). Then, briefly explain what can be learned from these results.
- (3) Let  $\omega$  be the angular frequency of the power source and  $t$  be time. Derive expressions for the instantaneous power  $p_A(t)$  in the three-phase load and  $p_B(t)$  in the single-phase load. Next, illustrate the waveforms of  $p_A(t)$  and  $p_B(t)$ , and explain their relationship to  $P_A$  and  $P_B$ , respectively obtained in Question (1). The phase of the source voltage can be defined appropriately.

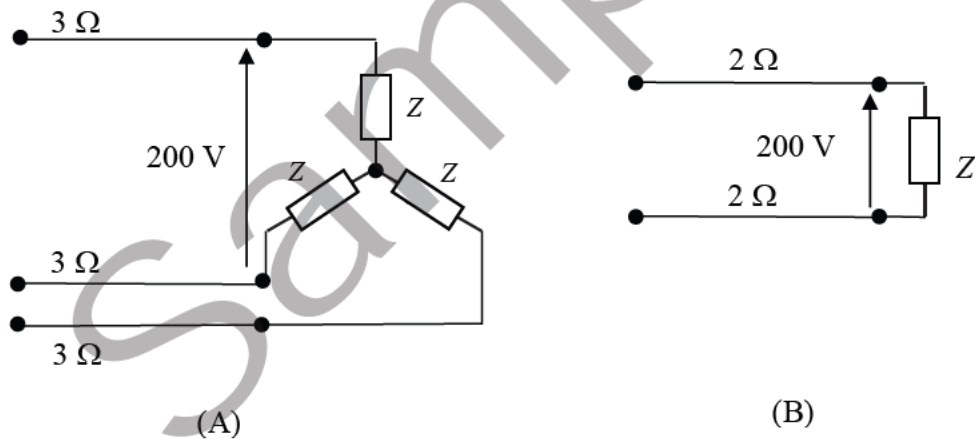


Fig. 2